التمرين الأول(04):

الفضاء منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. (D_1) و (D_2) مستقيمان من الفضاء معرفان بمعادلاتهما :

$$(D_1): \frac{x-2}{3} = -y-1 = z-3 \quad \text{و} \quad (D_2): x+1 = \frac{y}{2} = 2-z$$

1. اكتب تمثيلا وسيطيا لكل من (D_1) و (D_2)
2. بين ان (D_1) و (D_2) يتقاطعان في نقطة A يطلب تعيين احداثياتها
3. اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يحوي المستقيمين (D_1) و (D_2)
4. (S) سطح كرة تتقاطع من المستويين الذين معادلاتهما $z=0$ ، $y=0$ على الترتيب وفق الدائرتين المعرفتين بـ:

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y+2)^2=13\\ z=0\end{cases} \text{ ، } \begin{cases}(x-2)^2+(z+1)^2=10\\ y=0\end{cases}$$

عين الوضع النسبي لـ (S) و (P)

التمرين الثاني(05):

1) نعتبر في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ كثير الحدود P الذي متغيره z حيث : $P(z)=z^3-4z^2+6z-4$

ا) بين ان المعادلة $P(z)=0$ لاتقبل حلا تخيليا صرفا

ب) عين العددين الحقيقيين a، b حيث : $P(z)=(z-2)(z^2+az+b)$

ج) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$

2) في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ، الوحدة $\|\vec{u}\|=2cm$ نعتبر النقط A، B، C التي لواحقها على الترتيب : $z_A=2$ ، $z_B=1-i$ ، $z_C=1+i$

ا) اكتب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الجبري ، استنتج طبيعة المثلث ABC

ب) اكتب z_B و z_C على الشكل الاسي

ج) تحقق ان : $\left(\frac{z_B}{\sqrt{2}}\right)^{1437}+\sqrt{2}\left(\frac{z_C}{\sqrt{2}}\right)^{2016}=\frac{\sqrt{2}}{2}z_C$

3) ليكن R الدوران الذي مركزه A ويحول B الى C

ا) عين θ زاوية الدوران R

ب) اكتب العبارة المركبة للدوران R ، ثم عين لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالدوران R

4) لتكن (ϕ) الدائرة التي قطرها $[BC]$ ومركزها النقطة I و (ϕ') صورتها بالدوران R

انشئ بعناية كلا من الدائرتين (ϕ) و (ϕ')

التمرين الثالث(04):

في الشكل المرفق (C_f)هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على المجال$]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{x}{ln(x)}$والمستقيم(d) ذو المعادلة $y=x$. نعتبر المتتالية العددية(u_n) المعرفة على$\mathbb{N}$ بـ: $u_0=5$ و $u_{n+1}=f(u_n)$

1. باستعمال التمثيل البياني للدالة f ، مثل على محور الفواصل الحدود u_0،u_1،u_2،u_4 . و اعط تخمينا حول سلوك المتتالية (u_n)
2. برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعيn : $u_n \geq e$
3. ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)، ثم استنتج انها متقاربة نحو عدد حقيقيl من المجال $[e;+\infty[$
4. لحساب نهاية المتتالية (u_n) اثبت ان: $f(l)=l$ ثم استنتج قيمة l

التمرين الرابع(07):

I. نعتبر الدالة g المعرفة على المجال$]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x-1-\ln x$

1) ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها

2) استنتج اشارة$g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$ثم استنتج انه من اجل$]0;+\infty[$ $x\epsilon$ ، $\ln\left(\frac{x}{2}\right)\leq\frac{x}{2}-1$ .... $(*)$

II. نعتبر الدالة f المعرفة على المجال$]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x^2-2-2x\ln x$ و $f(0)=-2$

نسمي(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) ا) احسب نهاية الدالة f عند0 وماذا تستنتج ؟

ب) احسب $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+2}{x}$ ماذا تستنتج بالنسبة للدالة f وبالنسبة للمنحنى(C_f) ؟

ج) احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$

2) ا) بين ان الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال$]0;+\infty[$ وان $f'(x)=2g(x)$

ب) استنتج اشارة$f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالةf .ثم استنتج نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)

3) بين ان المعادلة $f(x)=0$تقبل حلا وحيدا αعلى المجال $]2;3[$

4) ا) بين ان معادلة المماس(Δ) للمنحنى(C_f) عند النقطة التي فاصلتها2 هي $y=2(1-\ln 2)x-2$

ب) باستعمال العلاقة$(*)$ حدد الوضع النسبي للمنحنى(C_f) والمستقيم (Δ)

5) ارسم كل من (Δ)و (C_f)

6) ا) احسب مشتق الدالة $x\mapsto\frac{x^2}{2}(2\ln x-1)$ على المجال$]0;+\infty[$. استنتج دالة اصليةF للدالة f

ب) λ عدد حقيقي موجب تماما ، احسب $A(\lambda)$مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f)والمستقيمات التي معادلاتها$y=0$ ،$x=\lambda$ و$x=2$ ثم احسب $\lim_{x\to 0}A(\lambda)$

Nafouz

التنقيط	التصحيـــــح المفصل

التمرين 01 :

1) اكتب تمثيلا وسيطيا لكل من (D_1) و (D_2) :

$(D_1): \frac{x-2}{3} = -y-1 = z-3$ معناه

$\begin{cases} \frac{x-2}{3} = t \\ -y-1 = t \\ z-3 = t \end{cases} ; t\in\mathbb{R}$ أي $\begin{cases} x = 3t+2 \\ y = -1-t \\ z = 3+t \end{cases} ; t\in\mathbb{R}$ — **0.5**

وهو تمثيل وسيطي لـ (D_1)

$(D_2): x+1 = \frac{y}{2} = 2-z$ معناه :

$\begin{cases} x+1 = t' \\ \frac{y}{2} = t' \\ 2-z = t' \end{cases} ; t\in\mathbb{R}$ أي $\begin{cases} x = -1+t' \\ y = 2t' \\ z = 2-t' \end{cases} ; t\in\mathbb{R}$ — **0.5**

وهو تمثيل وسيطي لـ (D_2)

2) بين ان (D_1) و (D_2) يتقاطعان في نقطة A يطلب تعيين احداثياتها — **01**

اذا كانت $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء فان

$M\in(D_1)\cap(D_2)$: معناه $\begin{cases} 3t+2 = -1+t' \\ -1-t = 2t' \\ 3+t = 2-t' \end{cases}$

بحل هذه الجملة نجد ان : $t' = 0$ ، $t = 0$ وعليه بالتعويض في احدى العبارتين نجد ان (D_1) و (D_2) يتقاطعان في النقطة $A(-1;0;2)$

3) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يحوي المستقيمين (D_1) و (D_2) — **01**

لدينا : $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ شعاعا توجيه لـ (D_1) و (D_2) على الترتيب ، ليكن $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ شعاعا ناظميا للمستوي (P) ،

عندئذ $\begin{cases} \vec{n}.\overrightarrow{u_1} = 0 \\ \vec{n}.\overrightarrow{u_2} = 0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} 3a-b+c = 0 \\ a+2b-c = 0 \end{cases}$ باخذ $a = 1$ نجد

بحل الجملة ان $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-4\\-7\end{pmatrix}$. وعليه معادلة المستوي (P)

من الشكل $x-4y-7z+d = 0$ ولكون $A\in(P)$

وبتعويض احداثياتها في المعادلة نجد ان $d = 15$ اي معادلة لـ (P)

هي : $x-4y-7z+15 = 0$

معادلة ديكارتية لسطح الكرة هي تقاطع (S) مع المستوي الذي معادلته $z = 0$ ينتج :

$\begin{cases} (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + {z_0}^2 = r^2 \\ z = 0 \end{cases}$

اي $\begin{cases} (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2 - {z_0}^2 \\ z = 0 \end{cases}$

ومع المستوي الذي معادلته $y = 0$ ينتج

اي $\begin{cases} (x-x_0)^2 + {y_0}^2 + (z-z_0)^2 = r^2 \\ y = 0 \end{cases}$

وعليه نجد $\begin{cases} (x-x_0)^2 + (z-z_0)^2 = r^2 - {y_0}^2 \\ y = 0 \end{cases}$ — **01**

معادلة لـ (S) هي : $(x-2)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 14$ مركز (S) هو $\Omega(2;-2;-1)$ ولدينا

المسافة بين Ω و (P) هي $d(\Omega,P) = \frac{16}{23} < \sqrt{14}$ وعليه

(S) و (P) متقاطعان وتقاطعهما دائرة

التمرين 02 :

1) ا) لنفرض ان $P(z) = 0$ تقبل حلا تخيليا صرفا هو a_i حيث $a\in\mathbb{R}$ — **0.25**

وبالتالي نجد : $-ia^3 + 4a^2 - 6ai - 4 = 0$ يكافئ: $\begin{cases} 4a^2 - 4 = 0 \\ -a^3 - 6a = 0 \end{cases}$ وهذا مستحيل

اذن $P(z) = 0$ لاتقبل حلا تخيليا صرفا

ب) ان $P(z) = (z-2)(z^2-2z+2)$ بالنشر والمطابقة — **0.5**

ج) $P(z) = 0$ يكافئ $z = 0$ او

$z^2 - 2z + 2 = 0 \ldots\ldots (I)$

لنحل : (I) $\Delta = (2i)^2$ وبالتالي المعادلة (I) تقبل حلين مركبين مترافقين هما : $1-i$ ، $1+i$ — **0.5**

المعادلة $P(z) = 0$ حلولها هي : $S = \{2; 1-i\,;\ 1+i\}$

2) ا) $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -i$ ومنه $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ — **0.5**

والمثلث ABC قائم في A — **0.5**

ب) $z_B = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ و $z_C = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ — **0.5**

ج) $\left(\frac{z_B}{\sqrt{2}}\right)^{1437} + \sqrt{2}\left(\frac{z_C}{\sqrt{2}}\right)^{2016} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = \frac{\sqrt{2}}{2}z_C$ — **0.5**

3) ا) تعيين θ زاوية الدوران R

لدينا : $z_C - z_A = a(z_B - z_A)$ ومنه : $a = -1$ اذن — **0.5**

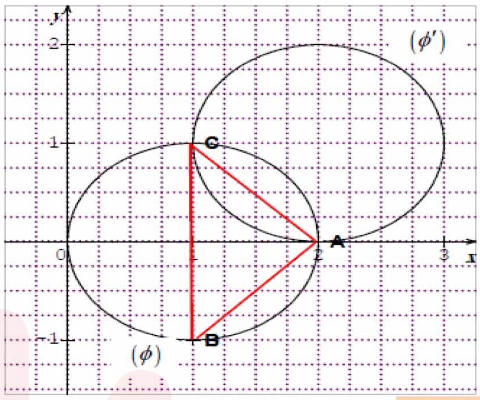
$\theta = arg(a) == -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$

ب) العبارة المركبة للدوران R هي : $z' = -iz + 2 + 2i$ — **0.5**

$z_D = 3 + i$ — **0.25**

4) الدائرة (ϕ) مركزها $I(1;0)$ ونصف قطرها 1 والدائرة (ϕ') مركزها $I'(2;1)$ صورة I بالدوران R ونصف قطرها 1 لان الدوران تقايس

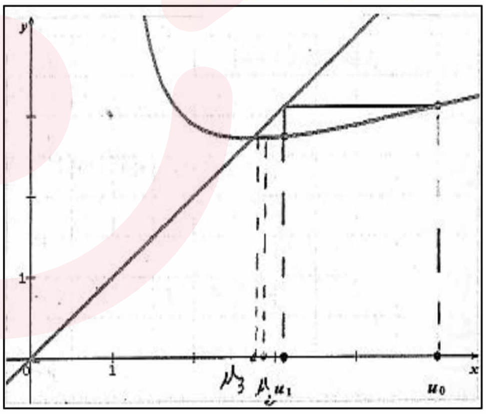
0.5



التمرين 03 :

الدالة f معرفة على المجال $]1;+\infty[$: $f(x)=\frac{x}{\ln x}$

1. تمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 0.75



ب) التخمين: المتتالية (u_n) متناقصة تماما ومتقاربة 0.5

2. اثبات بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n ان : $u_n \geq e$

نسمي $P(n)$ هذه الخاصية

- نبرهن ان $P(n)$ صحيحة من اجل $n=0$

لدينا $u_0=5$ اذن $u_0 \geq e$ ومنه $P(0)$ صحيحة 0.5

- نفرض ان $P(n)$ صحيحة اي ان $u_n \geq e$ ونبرهن ان $u_{n+1} \geq e$

لدينا $u_n \geq e$ وبما ان الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[e;+\infty[$ فان $f(u_n) \geq f(e)$ ومنه $u_{n+1} \geq e$ اذن الخاصية صحيحة .

ومنه نستنتج حسب مبدا الاستدلال بالتراجع فان : من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq e$

د) نبين ان المتتالية (u_n) متقاربة نحو l

اتجاه تغير المتتالية (u_n)

$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n(1-\ln u_n)}{\ln u_n} \leq 0$ لان : $u_n \geq e$ ومنه : $1-\ln u_n \leq 0$ 0.75

ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما 0.5

وبما انها محدودة من الاسفل فهي متقاربة نحو عدد حقيقي l من المجال $[e;+\infty[$ 0.5

ت) نهاية متتالية (u_n) :

المتتالية متقاربة نحو l معناه :

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\lim_{n\to+\infty} u_n) = f(l) = l$$

مستمرة على المجال $]1;+\infty[$ 0.5

ايجاد l : $f(l)l=e$

التمرين 04 :

I. 1) دراسة تغيرات الدالة :

- النهايات : $\lim_{x\to0} g(x)=+\infty$ و 0.25

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty$

- الاشتقاق : $g'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$ 0.25

- اشارة $g(x)$:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	||	$-$	0	$+$	

- اتجاه التغير : الدالة g متناقصة تماما على المجال $]0;1]$ ومتزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$

- جدول تغيرات الدالة g :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$g(x)$	|| $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

0.5

- اشارة $g(x)$:

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	||	$+$	0	$+$	

- اذا كان : $X\in]0;+\infty[$ فان : $X-1-\ln X \geq 0$ 0.25

$\ln X \leq X-1$ بوضع : $X=\frac{x}{2}$ يكون : $\ln\frac{x}{2} \leq \frac{x}{2}-1$

II. 1) أ) $\lim_{x\to0} f(x)=-2$ نستنتج ان الدالة f مستمرة على يمين العدد 0 0.25

ب) $\lim_{x\to0} \frac{f(x)+2}{x}=+\infty$ 0.5

الاستنتاج : الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند العدد 0 من اليمين 0.25

المنحنى (C_f) يقبل نصف مماس يوازي حامل محور التراتيب 0.25

معادلته $x=0$

ج) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=$

$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(1-\frac{2}{x^2}-\frac{2\ln x}{x}\right)=+\infty$ 0.25

2) ا) الدالتان $x \mapsto x^2-2$ و $x \mapsto -2x\ln x$ قابلتين للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ وبالتالي الدالة f حيث $f(x)=x^2-2-2x\ln x$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ولدينا $f'(x)=2x-2(\ln x+1)$ **0.25**

$f'(x)=2g(x)$

ب) اشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$ وبالتالي :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$+$	

0.25

جدول تغيرات الدالة f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$+$	
$f(x)$	-2	↗		↗	$+\infty$

0.5

ج) $f'(x)$ انعدم عند $x=1$ ولم يغير اشارته ، اذن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف احداثياتها $(1;-1)$ **0.25**

3) نطبق مبرهنة القيم المتوسطة على المجال $]2;3[$.

$f(3)\approx 0.40$ و $f(2)\approx -0.77$ **0.25**

4) ا) $f(2)=2-4\ln 2$ و $f'(2)=2(1-\ln 2)$ اذن

$y=2(1-\ln 2)x-2$ **0.25**

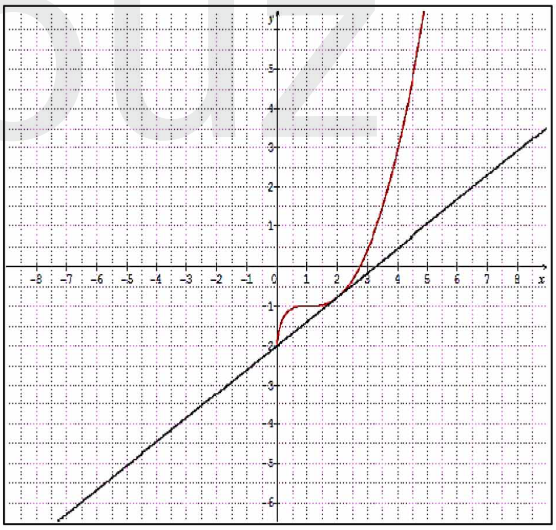
ب)

$f(x)-[2(1-\ln 2)x-2]=2x\left[\frac{x}{2}-1-\ln\left(\frac{x}{2}\right)\right]\geq 0$

الوضع النسبي: (C_f) يقع فوق (Δ) على المجالين: $]2;+\infty[$ و $]0;2[$ **0.5**

(C_f) و (Δ) يتقاطعان عند النقطتين ذاتا الفاصلتين: $x=0$ و $x=2$

4) الانشاء :



0.75

0.5

5) ا) مشتق الدالة $x \mapsto \frac{x^2}{2}(2\ln x-1)$ على المجال $]0;+\infty[$ هو : $x\mapsto 2x\ln x$ **0.25**

الدالة $F(x)=\frac{x^3}{3}-2x-\frac{x^2}{2}(2\ln x-1)+C$ حيث $(C\in\mathbb{R})$ اصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$ **0.25**

ب)

$A(x)=\int_\lambda^2 -f(x)=\left[-\frac{x^3}{3}+2x+\frac{x^2}{2}(2\ln x-1)\right]_\lambda^2$

$=-\frac{2}{3}+4\ln 2+\frac{\lambda^3-6\lambda}{3}-\frac{\lambda^2}{2}(2\ln\lambda-1)$ **0.75**

$\lim_{\lambda\to 0}A(\lambda)=-\frac{2}{3}+4\ln 2$